

La sûreté de fonctionnement des systèmes informatiques est aujourd'hui un enjeu économique et sociétal majeur.

Cet ouvrage présente la théorie mathématique de la fiabilité des logiciels et ses applications, qui permettent de prévoir l'occurrence des défaillances futures d'un système informatique et d'évaluer sa fiabilité.

Les principaux modèles du processus des défaillances et corrections d'un logiciel y sont décrits en adoptant une présentation unifiée dans le cadre des processus aléatoires ponctuels. Les méthodes statistiques associées (de l'inférence bayésienne au choix de modèle) sont également étudiées, ainsi que les modèles prenant en compte des covariables et l'architecture d'un logiciel. L'objectif est d'aller de l'étude conceptuelle approfondie des modèles au calcul numérique des indicateurs de fiabilité à l'aide d'exemples.

Mêlant théorie et pratique, *Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels* s'adresse aux étudiants, ingénieurs, chercheurs en mathématiques appliquées et en informatique, intéressés par les méthodes probabilistes et leurs applications en fiabilité.

#### *Les auteurs*

Olivier Gaudoin est professeur à l'Ecole nationale supérieure d'informatique et de mathématiques appliquées de Grenoble (ENSIMAG) où il enseigne les probabilités et la statistique. Ses domaines de recherche sont la modélisation aléatoire et l'analyse statistique pour la fiabilité des systèmes.

James Ledoux est maître de conférences à l'Institut national des sciences appliquées (INSA) de Rennes où il enseigne les mathématiques appliquées, et en particulier les probabilités et la statistique. Ses recherches portent sur la modélisation aléatoire.



www.hermes-science.com

978-2-7462-1608-2



Lavoisier

Olivier Gaudoin  
James Ledoux

Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels

# Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels

Olivier Gaudoin  
James Ledoux

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos</b> . . . . .	13
<b>Chapitre 1. Introduction</b> . . . . .	15
1.1. Problématique de la fiabilité des logiciels . . . . .	15
1.2. Utilisation des évaluations de fiabilité des logiciels . . . . .	18
1.3. Terminologie . . . . .	18
1.4. Différences entre fiabilité des logiciels et fiabilité des matériels . . . . .	20
1.5. Entrées, profil opérationnel et fautes . . . . .	21
1.6. Défaillances et corrections . . . . .	22
1.7. Exemple de données . . . . .	23
1.8. Contenu du livre . . . . .	26
<b>Chapitre 2. Concepts de base</b> . . . . .	29
2.1. Concepts élémentaires de fiabilité . . . . .	29
2.1.1. Hypothèses de base . . . . .	30
2.1.2. Les fonctions fiabilité et de survie résiduelle . . . . .	30
2.1.3. Le taux de défaillance . . . . .	31
2.1.4. Le MTTF . . . . .	35
2.2. Les lois usuelles de durées de vie . . . . .	36
2.2.1. La loi exponentielle . . . . .	36
2.2.2. La loi de Weibull . . . . .	38
2.2.3. La loi gamma . . . . .	39
2.2.4. La loi lognormale . . . . .	41

6 Fiabilité des logiciels

2.2.5. La loi de Pareto . . . . .	41
2.2.6. La loi hypoexponentielle. . . . .	42
2.2.7. La loi hyperexponentielle . . . . .	43
2.2.8. Lois avec taux de défaillance en baignoire . . . . .	43
2.3. Autres lois usuelles en fiabilité . . . . .	44
2.3.1. La loi binomiale . . . . .	44
2.3.2. La loi de Poisson . . . . .	45
2.3.3. La loi normale . . . . .	45
2.3.4. La loi uniforme . . . . .	46
2.3.5. La loi puissance . . . . .	46
2.4. Concepts élémentaires de statistique . . . . .	47
2.4.1. Estimation . . . . .	47
2.4.2. Qualité d'un estimateur . . . . .	48
2.4.3. Intervalles de confiance et tests d'hypothèses . . . . .	49
2.4.4. Statistiques d'ordre . . . . .	51
2.5. Notations et conventions . . . . .	51
<b>Chapitre 3. Modèles de défaillance auto-excités . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1. Le processus des défaillances . . . . .	53
3.2. Quelques mesures de fiabilité des systèmes réparables . . . . .	57
3.3. Construction d'un modèle de défaillance . . . . .	59
3.3.1. La suite des instants de défaillance. . . . .	60
3.3.2. Le processus de comptage des défaillances. . . . .	61
3.4. Propriétés des modèles de défaillance auto-excités . . . . .	67
3.4.1. Notion de mémoire . . . . .	67
3.4.2. Intensité cumulée ou compensateur . . . . .	67
3.4.3. Loi des durées inter-défaillances . . . . .	68
3.4.4. Loi des instants de défaillance . . . . .	71
3.4.5. Fonctions de vraisemblance . . . . .	73
3.4.6. Loi du nombre de défaillances survenues. . . . .	74
3.4.7. Expressions des principales grandeurs de fiabilité. . . . .	75
3.5. Classification des modèles de défaillance auto-excités . . . . .	78
3.6. Notes et compléments. . . . .	79
<b>Chapitre 4. Processus ponctuels . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1. Processus de comptage et intensité stochastique . . . . .	82
4.1.1. Histoire, mesurabilité, prévisibilité. . . . .	82

4.1.2. Intensité stochastique . . . . .	84
4.1.3. Intensité d'un processus de comptage relativement à son histoire interne . . . . .	86
4.2. Processus de Poisson . . . . .	93
4.3. Simulation . . . . .	99
4.3.1. Inverse généralisée . . . . .	99
4.3.2. Simulation par inversion. . . . .	100
4.3.2.1. Image d'un processus de Poisson par un changement de temps . . . . .	100
4.3.2.2. Simulation et taux de hasard . . . . .	102
4.4. Modèles conditionnellement auto-excités . . . . .	103
4.5. Intensité à structure multiplicative . . . . .	105
4.5.1. Exemple introductif. . . . .	105
4.5.2. Modèles de régression . . . . .	106
4.6. Notes et compléments. . . . .	108
<b>Chapitre 5. Processus markoviens . . . . .</b>	<b>111</b>
5.1. Processus markovien de sauts . . . . .	111
5.1.1. Propriété de Markov . . . . .	111
5.1.2. Noyau de transition . . . . .	113
5.1.3. Caractérisation des processus markoviens de sauts . . . . .	114
5.1.4. Générateur infinitésimal et graphe de transition . . . . .	116
5.1.5. Irréductibilité et ergodicité . . . . .	119
5.1.6. Processus markovien uniformisable . . . . .	121
5.2. Processus de comptage associés à un processus markovien de sauts . . . . .	124
5.2.1. Intensités des processus de comptage . . . . .	124
5.2.2. Processus de naissance pure. . . . .	127
5.2.3. Intégrabilité . . . . .	128
5.3. Le processus markovien des arrivées. . . . .	130
5.3.1. Définition. . . . .	130
5.3.2. MAP et processus de renouvellement markovien . . . . .	134
5.3.3. Intensité stochastique d'un MAP. . . . .	135
5.3.4. Principales formules utiles en fiabilité. . . . .	139
5.3.4.1. Fonction fiabilité . . . . .	139
5.3.4.2. MTTF . . . . .	140
5.3.4.3. Loi de $N_t$ . . . . .	141
5.3.4.4. Fonction moyenne et ROCOF . . . . .	142

8 Fiabilité des logiciels

5.4. Quelques éléments sur les chaînes de Markov générales . . . . .	144
5.5. Notes et compléments. . . . .	145
<b>Chapitre 6. Propriétés générales des processus de Poisson. . . . .</b>	<b>147</b>
6.1. Intensité de défaillance . . . . .	147
6.2. Processus de comptage des défaillances . . . . .	148
6.3. Durées inter-défaillances . . . . .	151
6.4. Instants de défaillance . . . . .	152
6.5. Fiabilité et MTTF . . . . .	154
6.6. Fonctions de vraisemblance . . . . .	155
6.7. Lien entre NHPP et processus de records . . . . .	158
6.8. Quelques propriétés utiles . . . . .	158
<b>Chapitre 7. Fiabilité d'un logiciel non corrigé : les processus de Poisson homogènes. . . . .</b>	<b>163</b>
7.1. Définition et propriétés probabilistes. . . . .	163
7.1.1. Processus de comptage des défaillances. . . . .	164
7.1.2. Durées inter-défaillances . . . . .	164
7.1.3. Instants de défaillance . . . . .	165
7.1.4. Fiabilité et MTTF . . . . .	166
7.1.5. Fonctions de vraisemblance . . . . .	167
7.1.6. Quelques propriétés utiles . . . . .	167
7.2. Estimation des grandeurs de la fiabilité . . . . .	168
7.2.1. Censure de type 2 . . . . .	168
7.2.1.1. Estimation ponctuelle de $\lambda$ . . . . .	168
7.2.1.2. Intervalles de confiance pour $\lambda$ . . . . .	172
7.2.1.3. Tests d'hypothèses sur $\lambda$ . . . . .	173
7.2.1.4. Estimation du MTTF et de la fiabilité. . . . .	174
7.2.2. Censure de type 1 . . . . .	176
7.2.2.1. Estimation ponctuelle de $\lambda$ . . . . .	176
7.2.2.2. Intervalles de confiance et tests d'hypothèses . . . . .	178
7.2.2.3. Estimation de la fiabilité . . . . .	179
7.2.3. Données groupées. . . . .	179
7.3. Application aux données de l'exemple. . . . .	180
7.4. Validation des logiciels. . . . .	181
7.4.1. Validation en présence de défaillances . . . . .	181
7.4.2. Validation en l'absence de défaillance . . . . .	181

<b>Chapitre 8. Modèles à durées inter-défaillances exponentielles et leurs généralisations</b> . . . . .	183
8.1. Définition et propriétés des modèles ETBF . . . . .	183
8.1.1. Intensité de défaillance. . . . .	184
8.1.2. Instants de défaillance . . . . .	185
8.1.3. Processus de comptage des défaillances. . . . .	186
8.1.4. Fiabilité et MTTF . . . . .	186
8.1.5. Fonction de vraisemblance . . . . .	187
8.2. Le modèle de Jelinski-Moranda . . . . .	187
8.2.1. Définition. . . . .	187
8.2.2. Propriétés probabilistes . . . . .	189
8.2.3. Propriétés statistiques . . . . .	190
8.2.4. Commentaires . . . . .	192
8.2.5. Premières généralisations du modèle de Jelinski-Moranda . . . . .	192
8.3. Le modèle géométrique de Moranda . . . . .	193
8.3.1. Définition et propriétés probabilistes . . . . .	193
8.3.2. Propriétés statistiques . . . . .	196
8.4. Les modèles de statistiques d'ordre généralisées. . . . .	198
8.4.1. Définition. . . . .	198
8.4.2. Propriétés probabilistes . . . . .	199
8.4.3. Quelques modèles GOS . . . . .	201
8.5. Modèles conditionnellement ETBF. . . . .	202
8.5.1. Définition. . . . .	202
8.5.2. Le modèle de Littlewood . . . . .	203
8.5.3. Le modèle de Littlewood-Verrall. . . . .	206
8.5.4. Modélisation par chaînes de Markov cachées . . . . .	208
8.5.4.1. Le profil opérationnel poissonnien homogène. . . . .	208
8.5.4.2. Lois conditionnelles des taux de hasard . . . . .	210
8.5.4.3. Le modèle de Basu et Ebrahimi . . . . .	212
8.5.4.4. Le modèle proportionnel lognormal. . . . .	213
8.5.4.5. Un modèle à deux taux de correction . . . . .	214
8.5.4.6. Un modèle de chaîne de Markov cachée . . . . .	215
8.6. Notes et compléments. . . . .	216
<b>Chapitre 9. Quelques modèles NHPP</b> . . . . .	217
9.1. Construction des modèles NHPP . . . . .	217
9.1.1. Loi du premier instant de défaillance . . . . .	218
9.1.2. Lien entre ROCOF et intensité . . . . .	218
9.1.3. Lien entre NHPP et modèles GOS . . . . .	219

10 Fiabilité des logiciels

9.2. Le processus de puissance ou modèle de Duane . . . . .	221
9.2.1. Définition et propriétés probabilistes . . . . .	221
9.2.1.1. Processus de comptage des défaillances . . . . .	222
9.2.1.2. Durées inter-défaillances . . . . .	223
9.2.1.3. Instants de défaillance . . . . .	223
9.2.1.4. Fiabilité et MTTF . . . . .	223
9.2.1.5. Fonctions de vraisemblance . . . . .	224
9.2.1.6. Quelques propriétés utiles. . . . .	224
9.2.2. Estimation des grandeurs de la fiabilité . . . . .	226
9.2.2.1. Censure de type 2. . . . .	226
9.2.2.2. Censure de type 1. . . . .	230
9.2.2.3. Données groupées . . . . .	231
9.2.3. Application aux données de l'exemple . . . . .	232
9.2.4. La famille puissance généralisée . . . . .	232
9.3. Le modèle de Goel-Okumoto . . . . .	233
9.4. Quelques extensions du modèle de Goel-Okumoto . . . . .	236
9.4.1. Décomposition en modules . . . . .	236
9.4.2. Taux de manifestation variable . . . . .	236
9.4.3. Correction imparfaite. . . . .	239
9.5. Autres modèles NHPP . . . . .	240
9.5.1. Le modèle de Musa-Okumoto . . . . .	240
9.5.2. Le modèle NHPP de Littlewood . . . . .	241
9.5.3. Le modèle hyperexponentiel . . . . .	242
9.6. Notes et compléments. . . . .	242
<b>Chapitre 10. Inférence bayésienne . . . . .</b>	<b>243</b>
10.1. Des éléments sur l'inférence bayésienne . . . . .	243
10.1.1. Principe général de l'inférence bayésienne . . . . .	243
10.1.2. Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov . . . . .	246
10.1.2.1. Echantillonneur d'Hastings-Metropolis . . . . .	248
10.1.2.2. Echantillonneur de Gibbs . . . . .	250
10.1.2.3. Echantillonneur de Gibbs avec complétion des données . . . . .	251
10.1.2.4. Echantillonneur de Gibbs avec une étape Hastings-Metropolis . . . . .	252
10.2. Inférence bayésienne en fiabilité des logiciels . . . . .	253
10.2.1. Analyses bayésiennes du modèle de Jelinski-Moranda . . . . .	254
10.2.2. Analyses bayésiennes du modèle de Littlewood-Verrall . . . . .	255

10.2.3. Analyses bayésiennes des modèles NHPP et GOS . . . . .	256
10.2.3.1. NHPP bornés . . . . .	256
10.2.3.2. Modèles GOS . . . . .	258
10.2.3.3. NHPP non bornés . . . . .	259
10.2.3.4. Estimation et contrôle de convergence . . . . .	260
10.2.4. Le modèle d'Al-Mutairi, Chen et Singpurwalla . . . . .	262
<b>Chapitre 11. Choix de modèles auto-excités . . . . .</b>	<b>267</b>
11.1. Les tests de tendance . . . . .	268
11.1.1. Méthodes graphiques . . . . .	268
11.1.2. Tests d'adéquation au HPP . . . . .	269
11.1.3. Le test de Laplace . . . . .	270
11.1.3.1. Censure de type 2 . . . . .	270
11.1.3.2. Censure de type 1 . . . . .	272
11.1.3.3. Données groupées . . . . .	273
11.1.4. Le test logarithmique . . . . .	274
11.1.4.1. Censure de type 2 . . . . .	274
11.1.4.2. Censure de type 1 . . . . .	276
11.1.5. Optimalité des tests de tendance . . . . .	276
11.2. Les tests d'adéquation . . . . .	276
11.2.1. Problématique . . . . .	276
11.2.2. Méthodes graphiques . . . . .	277
11.2.3. Tests d'adéquation pour des variables aléatoires i.i.d . . . . .	279
11.2.3.1. Cas 1 : tests d'adéquation à une loi entièrement spécifiée . . . . .	280
11.2.3.2. Cas 2 : test d'adéquation à une famille paramétrée de lois . . . . .	282
11.2.4. Tests d'adéquation au PLP . . . . .	283
11.2.5. Tests CPIT . . . . .	284
11.2.6. Les tests préquentiels . . . . .	285
11.2.7. Tests d'adéquation aux NHPP de Zhao-Wang . . . . .	288
11.2.8. Comparaison des tests d'adéquation . . . . .	290
<b>Chapitre 12. Modèles à covariables . . . . .</b>	<b>291</b>
12.1. Covariables en fiabilité des logiciels . . . . .	291
12.2. Modèles basés sur le modèle de Cox . . . . .	292
12.2.1. Modèle à intensités proportionnelles . . . . .	292
12.2.2. L'individu est un sous-système d'un logiciel . . . . .	295



12	Fiabilité des logiciels	
	12.2.3. L'individu est une copie d'un logiciel . . . . .	295
	12.2.4. L'individu est une faute . . . . .	296
	12.3. Un modèle basé sur le modèle multiplicatif matriciel d'Aalen . . . . .	297
	12.3.1. Estimateur de Nelson-Aalen . . . . .	298
	12.3.2. Estimateur du vecteur des fonctions de régression . . . . .	302
	12.3.3. Adéquation au modèle . . . . .	303
	<b>Chapitre 13. Modèles basés sur l'architecture du logiciel . . . . .</b>	<b>307</b>
	13.1. Un modèle de la structure d'un logiciel . . . . .	308
	13.2. Quelques modèles de fiabilité . . . . .	310
	13.2.1. Le modèle de Laprie . . . . .	310
	13.2.2. Le modèle boîte-blanche de Littlewood . . . . .	312
	13.3. Un modèle général de processus markovien des arrivées . . . . .	314
	13.3.1. Analyse . . . . .	315
	13.3.2. Expressions des grandeurs de fiabilité . . . . .	318
	13.3.3. Comportement asymptotique . . . . .	319
	13.3.4. Croissance de fiabilité . . . . .	321
	13.3.5. Estimation des paramètres . . . . .	322
	13.3.6. Modèles en temps discret . . . . .	326
	13.4. D'autres approches . . . . .	328
	13.4.1. Approximations de la fiabilité . . . . .	328
	13.4.2. Simulation . . . . .	329
	13.4.3. Méthodes basées sur le test . . . . .	330
	13.5. Notes et compléments . . . . .	331
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>333</b>
	<b>Index . . . . .</b>	<b>353</b>